

*А. Г. Мадера, докт. техн. наук, профессор, НИИ системных исследований РАН,  
г. Москва, agmprof@gmail.com*

*П. И. Кандалов, ст. программист НИИ системных исследований РАН, г. Москва, petrki87@gmail.com*

# Компьютерное моделирование температурных полей технических систем при интервально стохастической неопределенности параметров<sup>1</sup>

Практика показывает, что температурные поля в реальных технических системах имеют неопределенный интервальный характер, что обуславливается интервально стохастической неопределенностью параметров системы. Однако математическое и компьютерное моделирование температурных полей осуществляется в настоящее время в предположении о их детерминированности и точно известных входных данных. В статье предлагается метод моделирования интервально стохастических температурных полей в технических системах. Применение метода показано на примере электронной системы.

**Ключевые слова:** техническая система, температурное поле, неопределенность, интервальный, стохастический, математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.

## Введение

Практика проектирования и создания технических систем показывает, что реальные температурные поля технических систем являются недетерминированными и имеют неопределенный интервальный характер. Неопределенность температурных полей обуславливается неопределенным характером параметров и факторов, определяющих тепловой режим технической системы, к которым можно отнести: 1) параметры конструкции технической системы, 2) факторы и параметры, возникающие при функционировании технической системы, и 3) факторы окружающей среды<sup>1</sup>.

1. Неопределенность конструктивных параметров технической системы обуславливается их статистическим технологическим

разбросом. Действительно, в технические системы, как правило, если они не носят уникальный характер, входят серийно изготавливаемые элементы, конструктивные параметры и характеристики которых (размеры, состояния поверхностей, волнистости, неровности, неплоскостности и пр.), в силу неизбежного статистического технологического разброса, различаются между собой. Параметры и характеристики конкретного элемента из серии «идентичных» элементов являются вполне определенными и могут быть измерены с определенной точностью. Вместе с тем в совокупности однородных элементов одного и того же вида все элементы будут обладать различными параметрами и характеристиками, изменяющимися внутри некоторых интервалов своих допустимых значений. Кроме того, контактирование и сопряжение элементов между собой (расположение, зазоры, площадь и характер контакта и т. д.) в процессе монтажа и сборки различных образцов техни-

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №12-07-00076-а.

ческой системы также подвержены статистическому технологическому разбросу. Поэтому и вся техническая система в целом, созданная из различных серийно изготавливаемых элементов, будет иметь параметры, значения которых следует считать случайными, а множество возможных значений — числовыми интервалами.

2. Вторая группа факторов включает в себя факторы, возникающие в процессе функционирования как отдельных элементов, так и технической системы в целом (мощности потребления элементов и системы, мощности тепловыделений, тепловые потоки в элементах и между элементами и т. д.). Факторы, действующие во время функционирования и эксплуатации технической системы в силу статистического технологического разброса изготовления носят неопределенный интервальный характер.

3. Факторы окружающей среды (температура, напряжение внешнего электропитания, скорости и входные температуры теплоносителей, условия охлаждения и теплоотвода отдельных элементов и технической системы и пр.) носят случайный характер [13]. К данной группе факторов относятся также взаимодействие рассматриваемой технической системы с другими системами, которые, в свою очередь, характеризуются неопределенными параметрами и характеристиками.

Неопределенные параметры и факторы (1–3), определяющие тепловой режим технической системы, всегда изменяются между своими наименьшими и наибольшими значениями, и следовательно, их неопределенность носит интервальный характер. При этом неопределенные параметры могут с равной вероятностью принимать произвольные значения (между своими минимальными и максимальными значениями) внутри своих интервалов изменения. В силу интервального характера определяющих тепловой режим параметров температурные поля технических систем также будут носить неопределенный интервальный характер.

Вместе с тем существующие методы моделирования температурных полей технических систем, применяемые при тепловом проектировании систем как в России, так и за рубежом, созданы на основе предположения о том, что параметры, определяющие тепловые режимы, являются детерминированными и однозначно определенными. Между тем практика показывает, что такое допущение приводит к результатам весьма далеким от реальности, что обуславливается, как показано выше, неопределенным и случайным характером определяющих параметров и факторов теплового режима технической системы.

Неопределенность факторов, определяющих тепловые режимы технических систем, приводит к тому, что различные экземпляры «идентичных» технических систем, построенные из «идентичных» элементов, будут иметь различные распределения температуры. Нередко причиной неправильного функционирования и срабатывания системы, выхода ее из строя, потери устойчивости, уменьшения помехозащищенности и надежности [6] является выход эксплуатационных и функциональных параметров системы за пределы допустимых интервалов изменения. Поэтому для получения адекватных результатов необходимо проводить моделирование температурных полей технических систем в условиях интервальной неопределенности параметров и факторов, определяющих тепловой режим.

Проблема моделирования температурных полей в условиях неопределенности, в частности стохастических температурных полей, для различных уровней иерархии технических систем рассматривалась в [1, 3, 10, 11, 13]. Предпринятые в ряде работ попытки моделировать интервальные температурные поля методами интервального анализа [1, 14] приводят к некорректным, неоправданно широким интервалам температур, не говоря уже о том, что результаты интервальных операций существенно зависят как от последовательности вычислений, так и от порядка преобразований алгебра-

ических выражений. Отсутствие на сегодняшний день адекватных и эффективных методов моделирования неопределенных интервально стохастических температурных полей в технических системах, по мнению авторов, обуславливается как значительными математическими трудностями, связанными с появляющимися стохастическими матрицами и операциями с ними (обращение, проблема стохастических собственных векторов и значений и пр.), так и с априори неизвестной сходимостью искомых распределений и моментов стохастического температурного поля к своим истинным «точным» значениям внутри интервалов своего изменения.

В данной работе рассматривается метод компьютерного моделирования интервально стохастических температурных полей, обусловленных интервальным характером входных данных, определяющих тепловой режим технической системы. Математический метод моделирования и алгоритм компьютерного моделирования интервально стохастических температурных полей в технических системах основывается на матрично-топологическом методе [2, 4], программном комплексе STF-ElectronMod [4, 8]), а также методе статистических испытаний [5, 7]. Разработанный метод многократно применялся при проектировании технических электронных систем и показал свою эффективность как в части затрат машинного времени, так и адекватности получаемых результатов. Применение разработанного метода рассмотрено на примере моделирования интервально стохастического температурного поля электронной системы.

### Моделирование интервальных температурных полей

В общем случае все параметры технической системы  $\theta(\omega) = (\theta_1(\omega), \theta_2(\omega), \dots, \theta_n(\omega))$ , определяющие тепловой режим (коэффициенты теплопроводности материалов конструкции, коэффициенты теплоотдачи с поверхностей элементов и системы, темпера-

туры среды, мощности тепловыделений, контактные тепловые сопротивления и др.), являются интервально неопределенными, т.е. изменяются в пределах своих интервалов, принимая внутри них любое значение.

Иначе говоря, параметры и характеристики  $\theta(\omega) \in \Theta(\omega)$  технической системы изменяются в пределах своих интервалов  $\theta_i(\omega) \in [\theta_{h,i}, \theta_{v,i}]$ , где  $\theta_{h,i}$  и  $\theta_{v,i}$  — нижняя (h) и верхняя (v) границы интервала, причем величина  $\theta(\omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , является равномерно распределенной случайной величиной с плотностью вероятности  $p = 1/\Delta_i$ , если  $\theta_i(\omega) \in [\theta_{h,i}, \theta_{v,i}]$  и  $p = 0$ , если  $\theta_i(\omega) \notin [\theta_{h,i}, \theta_{v,i}]$ ;  $\Delta_i = \theta_{v,i} - \theta_{h,i}$  — ширина интервала [9].

Поскольку параметры и характеристики технической системы носят интервально стохастический характер, то решение уравнений математической модели, описывающей температурное поле в различных точках технической системы с координатами  $(x, y, z)$ , будет также интервально стохастическим полем, т.е.  $T(\omega) = T(x, y, z, \omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ . Заметим, что в каждой точке технической системы температура будет принимать значения внутри некоторого интервала случайным образом, и распределение этих значений описывается законом распределения, отличным от равномерного. В результате решения уравнений математической модели (посредством разработанного авторами программного комплекса) для каждой реализации  $\omega \in \Omega$  определяются поля математических ожиданий, дисперсий, среднеквадратических отклонений, границ интервалов интервально стохастического температурного поля  $T(x, y, z, \omega)$  в технической системе:

- поле математических ожиданий (МО) температур  $M(T) = M(T(x, y, z, \omega))$ ;
- поле дисперсий  $D(x, y, z)$  значений температур вокруг соответствующих точек в поле математического ожидания;
- поле среднеквадратических отклонений (СКО)  $\sigma(x, y, z)$  температурного поля, определяемых как

$$\sigma(x, y, z) = \sqrt{D(x, y, z)};$$

• поля нижней  $T_{\text{н}}(x, y, z)$  и верхней  $T_{\text{в}}(x, y, z)$  границ интервалов стохастического температурного поля  $T(x, y, z, \omega)$ ,  $\omega \in \Omega$ , в пределах которых изменяются отдельные случайные реализации температуры для  $\omega \in \Omega$ .

Границы интервалов температуры  $T_{\text{н}}(x, y, z)$  и  $T_{\text{в}}(x, y, z)$  зависят от величины вероятности  $P$ , с которой интервалы  $[T_{\text{н}}(x, y, z), T_{\text{в}}(x, y, z)]$  покрывают возможные значения реальных температур в технической системе, имеющих место на практике. При этом нижние и верхние границы интервалов температур в точках  $(x, y, z)$  вычисляются как

$$T_{\text{н}}(x, y, z) = M(T) - \varepsilon \cdot \sigma(x, y, z) \\ \text{и } T_{\text{в}}(x, y, z) = M(T) + \varepsilon \cdot \sigma(x, y, z),$$

где  $\varepsilon$  — число, зависящее от принятой вероятности  $P$ ; при  $\varepsilon = 3$  вероятность обнаружить значение случайной температуры  $T(x, y, z, \omega)$  вне интервала  $[T_{\text{н}}(x, y, z), T_{\text{в}}(x, y, z)]$  будет, согласно неравенству Чебышева, меньше чем  $1/9$ .

Значения температуры  $T(x, y, z, \omega)$  в различных точках технической системы  $(x, y, z)$ , которые могут встретиться в реальности, будут принимать значения из интервала  $T(x, y, z, \omega) \in [M(T) - \varepsilon \cdot \sigma(x, y, z), M(T) + \varepsilon \cdot \sigma(x, y, z)]$ .

Алгоритм метода математического и компьютерного моделирования интервально стохастических температурных полей (рис. 1) содержит три основных этапа.

1. Ввод исходных данных по конструкции, функционированию и условиям эксплуатации технической системы, определяющим тепловой режим. Интервально стохастические входные данные задаются в виде своих интервалов изменения (нижних и верхних границ). По введенным данным осуществляется расчет усредненных температур и мощностей всех элементов в технической системе, с применением матрично-топологического метода и программного комплекса расчета детерминированных температурных полей STF-ElectronMod [8]. После этого методом статистических испытаний разыгрывается множество реализаций интервально

стохастических входных данных и рассчитанных величин усредненных температур элементов и мощностей источников и стоков тепла в технической системе.

2. По рассчитанному множеству реализаций вычисляются статистические меры усредненных температур и мощностей элементов в технической системе: математических ожиданий; дисперсий ( $D$ ); среднеквадратических отклонений (СКО); границ (нижней и верхней) интервалов, внутри которых изменяются реализации усредненных температур и мощностей; ковариационной матрицы стохастической связи между мощностями активных элементов (источников тепловыделения) и пассивных элементов (стоков тепловых потоков).

3. Определяются поля статистических мер интервально стохастических температур в технической системе, а именно: поля МО, поля  $D$ , поля СКО, границ интервалов, покрывающих при заданной вероятности возможные значения стохастических температур, которые могут иметь место на практике.

Рассмотренный алгоритм положен в основу разработанного авторами программного комплекса ПК STF-ElectronMod-2014, предназначенного для анализа неопределенных интервально стохастических температурных полей технических систем. Применение программного комплекса для реальных технических систем показало его высокие эффективность и точность. Так, для процессора с частотой 1,5 ГГц относительная погрешность вычислений не превышает  $3 \div 5\%$  при затратах машинного времени  $2 \div 3$  мин.

### Пример применения к электронной системе

Разработанный метод был применен к компьютерному моделированию интервального температурного поля, возникающего в электронной системе, содержащей многослойную печатную плату с 13 сигнальными и изолирующими слоями и установ-

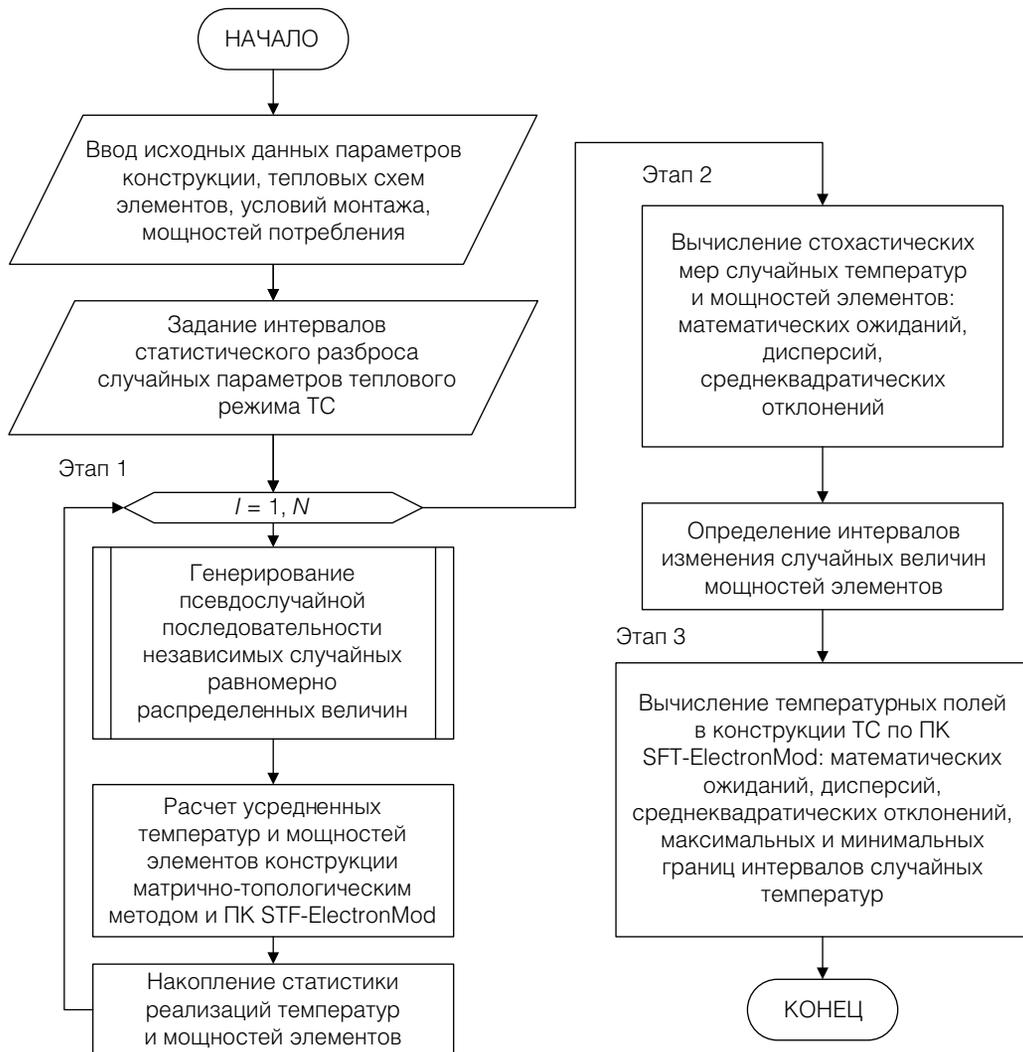


Рис. 1. Алгоритм компьютерного моделирования температурных полей при интервально стохастической неопределенности

Fig. 1. The computer simulation algorithm for modeling of temperature fields under an interval stochastic uncertainty

ленными на ней 5 интегральными микросхемами (ИМС) в керамических корпусах различных типов. Условия эксплуатации электронной системы соответствуют свободному конвективному теплообмену с воздушной средой, при нормальном давлении, температуре 25°C и кондуктивном теплоотводе с торцов конструкции. Параметры электронной системы, определяющие температурное поле электронной системы (входные данные), такие как мощности по-

требления ИМС  $Q_{\text{ИМС}}$ , тепловые сопротивления корпусов ИМС  $R_{\text{jc}}$ , монтажные воздушные зазоры  $\delta$  между корпусами ИМС и платой, будучи интервальными, изменялись внутри своих допустимых интервалов (табл. 1).

В силу интервального характера входных данных температурные поля в электронной системе, на печатной плате и корпусах ИМС будут также интервальными.

В табл. 1 приведены результаты моделирования математических ожиданий и сред-

**Таблица 1.** Интервальные входные данные  $Q_{имс}$ ,  $R_{jc}$ ,  $\delta$  и результаты моделирования интервальных температур корпусов ИМС

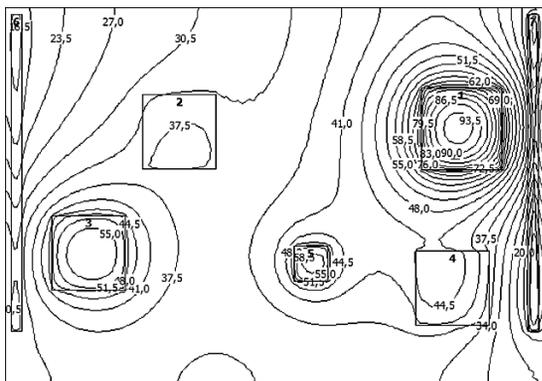
Table 1. Interval input data  $Q_{IC}$ ,  $R_{jc}$ ,  $\delta$  and the results of the modeling of interval temperatures of IC cases

Но- мер ИМС в ЭС	Интервальные входные данные			Результаты моделирования интервальных температур корпусов ИМС, °С		
	Интервалы зна- чений мощностей потребления ИМС $Q_{имс}$ , Вт	Интервалы значений теплового сопротивления ИМС $R_{jc}$ , Вт/мК	Интервалы значений зазора $\delta$ , мм	МО	СКО	Интервал значений
1	10–14	1,2–1,8	0,7–0,9	101,9	7,25	80,1–123,6
2	0,9–1,5	1,7–2,3	0,03–0,07	40,6	1,4	36,3–44,8
3	4,5–5,3	1,7–2,3	0,03–0,07	64,2	2,3	57,4–71,0
4	2,2–2,8	1,7–2,3	0,03–0,07	50,3	45,6–55,0	
5	1,6–2,4	6–7	0,3–0,7	60,0	3,1	50,8–69,1

неквадратических отклонений температуры корпусов ИМС, а также интервалы, внутри которых с вероятностью не меньшей 0,9 будут находиться реальные значения температур корпусов ИМС № 1–6. На рис. 1, 2 приведены распределения математического ожидания и среднеквадратического отклонения интервального температурного поля электронной системы.

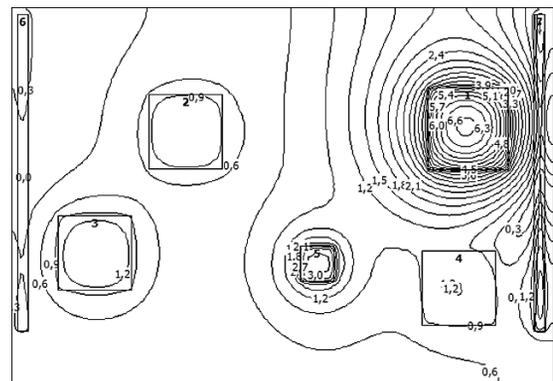
Результаты моделирования показывают, что реальные значения температуры (см. табл. 1) корпусов ИМС не являются однозначно определенными и детерминированными, а представляют собой случайные величины, распределенные в границах про-

межутков, в ряде случаев довольно большой длины. Так, разброс реальных температур ИМС № 1 (см. табл. 1) может достигать  $\pm 22^\circ\text{C}$ , что составляет  $\pm 21\%$  значения МО ( $=101,9^\circ\text{C}$ ). Полученные результаты свидетельствуют о том, что возможные значения температуры корпусов ИМС, установленных в различных экземплярах электронной системы одного типа, с вероятностью  $P \geq 0,9$  ( $\epsilon = 3$ ) будут заключены в интервалах, приведенных в табл. 1. Например, значения температуры корпуса ИМС № 1 в реальной электронной системе будут находиться в интервале  $[80,1^\circ\text{C}; 123,6^\circ\text{C}]$ , а корпуса ИМС № 4 — в интервале  $[45,6^\circ\text{C}; 55,0^\circ\text{C}]$ .



**Рис. 2.** Распределение математического ожидания интервального температурного поля электронной системы

Fig. 2. The distribution of the expectation of the interval temperature field in the electronic system



**Рис. 3.** Распределение среднеквадратического отклонения интервального температурного поля электронной системы

Fig. 3. The distribution of the standard deviation of the interval temperature field in the electronic system

## Заключение

Разработанный в статье метод моделирования, при котором моделирование температурных полей технических систем проводится в условиях задания интервальных входных данных, адекватно описывает реальные температуры, которые могут встретиться на практике.

В то же время детерминированный подход, применяемый в настоящее время при моделировании температурных полей технических систем, не отвечает реальности, поскольку фактически наблюдаемые значения температур носят принципиально случайный характер. Поэтому применение разработчиками технических систем методов детерминированного теплового моделирования, при котором получают не соответствующие реальности значения температур, может приводить к серьезным ошибкам проектирования технических систем вплоть до их полной неработоспособности.

## Список литературы

1. Добронев Б. С., Злобин В. С. Численное моделирование температурных полей с интервальными неопределенностями // Сибирский журнал индустриальной математики. 2004. Т. VII. №3 (19). С. 95–101.
2. Кандалов П. И., Мадера А. Г. Моделирование температурных полей в многослойных структурах // Программные продукты и системы. 2008. №4 (84). С. 46–49.
3. Мадера А. Г. Иерархический подход при тепловом проектировании электронных изделий // Программные продукты и системы. 2008. №4 (84). С. 43–46.
4. Мадера А. Г., Кандалов П. И. Матрично-топологический метод математического и компьютерного моделирования температурных полей в электронных модулях: программный комплекс STF-ElectronMod // Программные продукты и системы. 2012. №4. С. 160–164.
5. Михайлов С. М., Ермаков Г. А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982. — 286 с.
6. Надежность технических систем: Справочник / под ред. И. А. Ушакова. М.: Радио и связь, 1985. — 608 с.

7. Соболев И. М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. — 312 с.
8. Программный комплекс Simulation of Temperature Fields of Electronic Modules 2013 (STF-ElectronMod 2013) / П. И. Кандалов, А. Г. Мадера. Свидетельство о Гос. регистрации ПК для ЭВМ №2013615400 от 6.6.2013.
9. Hastings N., Peacock J. Statistical Distributions. A Handbook for Students and Practitioners. L.: Butter Worths, 1976. — 95 p.
10. Georgiadis J. G. On the approximate solution on non-deterministic heat and mass transport problems // International Journal of Heat and Mass Transfer. 1991. Vol. 33. No. 8. P. 2099–2105.
11. Keller C. J., Antonetti V. W. Statistical thermal design for computer electronics // Electronic Packaging and Production. 1979. Vol. 19. No. 3. P. 55–62.
12. Madera A. G., Sotnikov A. N. Method for analyzing stochastic heat transfer in a fluid flow // Applied Mathematical Modelling. 1996. Vol. 20. No. 8. P. 588–592.
13. Madera A. G. Modelling of stochastic heat transfer in a solid // Applied Mathematical Modelling. 1993. Vol. 17. No. 12. P. 664–668.
14. Ratschek H., Rokne J. Computer methods for the range of functions. N. Y.: John Wiley, 1984. — 764 p.

## References

1. Dobronets B. S., Zlobin V. S. *Chislennoe modelirovanie temperaturnykh polei s interval'nymi neopredelennostyami* [Numerical modeling of temperature fields at interval uncertainties]. *Sibirskii zhurnal industrial'noi matematiki*. 2004, vol. VII, no. 3 (19), pp. 95–101.
2. Kandalov P. I., Madera A. G. *Modelirovanie temperaturnykh polei v mnogosloynnykh strukturakh* [Modeling of temperature fields in multiple layers structures]. *Programmnye produkty i sistemy*. 2008, no. 4 (84), pp. 46–49.
3. Madera A. G. *Ierarkhicheskii podkhod pri teplovom proektirovanii elektronnykh izdelii* [Hierarchical approach to thermal design of electronic products]. *Programmnye produkty i sistemy*. 2008, no. 4 (84), pp. 43–46.
4. Madera A. G., Kandalov P. I. *Matrichno-topologicheskii metod matematicheskogo i komp'yuternogo modelirovaniya temperaturnykh polei v elektronnykh modulyakh: programmnyi kompleks STF-ElectronMod* [Matrix-topological method for mathe-

- mathematical and computer modeling of temperature fields in electronic modules: Programming complex STF-ElectronMod]. *Programmnye produkty i sistemy*. 2012, no. 4, pp. 160–164.
5. Mikhailov S. M., Ermakov G. A. *Statisticheskoe modelirovanie* [Statistical modeling]. Moscow, Nauka, 1982. 286 p.
  6. *Nadezhnost' tekhnicheskikh sistem: Spravochnik* [Reliability of technical systems: A Textbook Ed. by I. A. Ushakov]. Ed. by I. A. Ushakova. Moscow, Radio i svyaz', 1985. 608 p.
  7. Sobol' I. M. *Chislennyye metody Monte-Karlo* [Numerical Monte-Carlo method]. Moscow, Nauka, 1973. 312 p.
  8. Kandalov P. I., Madera A. G. *Programmnyi kompleks Simulation of Temperature Fields of Electronic Modules 2013 (STF-ElectronMod 2013)* [Computer program for simulation of temperature fields of electronic modules 2013 (STF-ElectronMod 2013)]. Log no. 2013615400, 2013.
  9. Hastings N., Peacock J. *Statistical Distributions. A Handbook for Students and Practitioners*. L., Butter Worths, 1976, 95 p.
  10. Georgiadis J. G. *On the approximate solution on non-deterministic heat and mass transport problems. International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1991, vol. 33, no. 8, pp. 2099–2105.
  11. Keller C. J., Antonetti V. W. *Statistical thermal design for computer electronics. Electronic Packaging and Production*. 1979, vol. 19, no. 3, pp. 55–62.
  12. Madera A. G., Sotnikov A. N. *Method for analyzing stochastic heat transfer in a fluid flow. Applied Mathematical Modelling*. 1996, vol. 20, no. 8, pp. 588–592.
  13. Madera A. G. *Modelling of stochastic heat transfer in a solid. Applied Mathematical Modelling*. 1993, vol. 17, no. 12, pp. 664–668.
  14. Ratschek H., Rokne J. *Computer methods for the range of functions*. N. Y., John Wiley, 1984, 764 p.

**A. Madera**, Research Institute for System Analysis of RAS, Moscow, Russia, [agmprof@gmail.com](mailto:agmprof@gmail.com)

**P. Kandalov**, Research Institute for System Analysis of RAS, Moscow, Russia, [petrki87@gmail.com](mailto:petrki87@gmail.com)

### Computer simulation of temperature fields in technical systems under interval stochastic uncertain parameters

Temperature fields in real technical systems are interval and stochastic, that caused by interval stochastic uncertain parameters. However existing methods for modeling of temperature fields in technical system are based on the assumption that parameters determining the thermal regimes are deterministic, meanwhile, an actual practice shows that such assumption is very far from the reality and leads to low adequacy of modeling. An interval stochastic nature of temperature fields in technical system is due to such random factors as: manufacturing tolerances; environmental characteristics; external environment of operation; design parameters of system (contact gap, sizes, shape, distance between elements, etc). All random factors determining thermal regimes of systems are changed within intervals of their random tolerance values. Therefore uncertainty of these factors as well as uncertainty of temperature distribution are interval stochastic too. But in the meantime at present there are no adequate and effective mathematical and computer simulation methods for modeling of interval stochastic temperature fields in complex technical systems. In this paper the mathematical and computer simulation method for modeling of interval-stochastic temperature fields in technical (electronic) systems, are developed. The temperature fields depend on interval character of thermal input parameters of technical system and operational conditions. The modeling computer simulation algorithm realized by computer program (STF-ElectronMod). Applying of these methods and algorithm to an electronic system, are shown.

**Keywords:** technical system, temperature field, uncertainty, interval, stochastic, expectation, variance, standard deviation.

#### About authors:

*A. Madera, Dr of Technique, Professor*

*P. Kandalov, Senior Programmer*

**For citation:** Madera A., Kandalov P. Computer simulation of temperature fields in technical systems under interval stochastic uncertain parameters. *Prikladnaya informatika* — Journal of Applied Informatics, 2015, vol. 10, no. 1 (55), pp. 106 — 113 (in Russian).